

2014年2月28日
国立大学法人筑波大学

高校生がスーパーコンピュータを使って5×5魔方陣の全解を求めることに成功

概要

筑波大学計算科学研究センターは、全国共同利用施設として、一般公募による「学際共同利用プログラム」^{※1}を実施しています。平成25年度に、茨城県立並木中等教育学校4年次（高校1年）の杉崎行優（すぎざき・ゆきまさ）君の申請が採択されました。杉崎君は筑波大学計算科学研究センターの朴泰祐教授と共同研究を進めた結果、スーパーコンピュータ「T2K-Tsukuba」^{※2}を使った並列計算により、5×5の魔方陣の全ての解を求めることに成功しました。

魔方陣とは、正方形のマス目に、縦・横・斜めの合計が同じになるよう数字を置いたものです。5×5の魔方陣の全解は2億7530万5224通りあることがすでにわかっています。杉崎君は「枝刈り法」を改良した求解アルゴリズムを考案し、スパコンに並列計算させるためのプログラムを開発しました。朴教授は、並列データの収集や並列化に関する詳細なアドバイスをいたしました。並列計算はT2K-Tsukubaの全648ノードのうち32ノードを使って行われ、最速で約2時間36分で全解を求めることができました。

1. 魔方陣

魔方陣は、正方形の方陣（マス目）に、縦・横・斜めの和が同じになるよう数字を置いたものです。とくに、1からマス目の総数までの数字すべてを使ったものを指します。

2	9	4
7	5	3
6	1	8

9	6	3	16
4	15	10	5
14	1	8	11
7	12	13	2

1	7	13	19	25
18	24	5	6	12
10	11	17	23	4
22	3	9	15	16
14	20	21	2	8

図1 魔方陣の例

マス目の数が3×3のとき、縦・横・斜めの和はすべて15になっており、解は対称のものを除くと1通りだけである。4×4では和は34で解は880通り、5×5では和は65で解は2億7530万5224通り（1970年代に発見）。6×6の解の総数はわかっていない。

2. スーパーコンピュータによる並列計算

(1) アルゴリズムの考案

魔方陣の求解は、すべての数字を「総当たり」で入れて正解かどうかを確かめていくのが基本です。しかし、たとえば 5×5 の場合、1 列の和が 65 とわかっているため、1 列の 4 マスまで埋まると残り 1 マスは自動的に求められ、これを総当たりから除くことができます。この考え方を「枝刈り法」といいます。

杉崎君はこの枝刈り法をもとに、総当たりのマス目の数を 25 から 14 まで減らせることに気づきました (図 2)。これは非常に重要で、総当たり数が 14 から 15 へたった 1 増えただけでも計算時間は数十倍になると見積もられています。今回は総当たりを 14 で行いましたが、これが最も少ないかどうかはわかりません。さらに減らせる可能性もあります。

①	⑧	⑨	✓	⑤
⑩	②	⑪	⑥	✓
⑫	⑬	③	⑭	✓
✓	⑦	✓	④	✓
✓	✓	✓	✓	✓

図 2 枝刈り法をもとにした求解アルゴリズム

丸数字は総当たりで数字を入れる順番 (1 から 25 の数字そのものではない)、✓ は自動的に求められるマスを表す。斜めのマスを優先的に埋めることで、自動的に求められるマスの個数をさらに増やすことができた。

(2) 並列プログラムの開発

並列型スーパーコンピュータのプログラミングでは、計算をいかに均等に各コアに振り分けるかが重要です。今回、 5×5 魔方陣の解を求めるにあたって、T2K-Tsukuba の 512CPU コア (32 ノード) を用いました。これは 4.7TFLOPS (1 秒間に 4.7 兆回の計算性能) に相当します。

魔方陣の解を求めるのに必要な計算を 512 コアに振り分けるために、マスタ・ワーカー方式を用いました。1 コアをマスタに指定して全体の司令塔の役目を担わせます。それ以外の 511 コアはワーカーとしてマスタの指示に従って計算を行います。このとき、仕事の振り掛が均等でないと、計算を早く終えてさぼっているコアが出てきてしまい、全体の計算時間が増えてしまいます。

実際の計算では、マスタが N 番目 (N は 0 から 14 のいずれか) のマスまで総当たりをし

て、その後をワーカーに振り分け、各ワーカーは $N+1$ 番目のマスから総当たりを行います。このとき、 N の値が小さいとワーカーの「粒度」(仕事のバラつき) が大きくなってワーカーの計算時間にバラつきがでます(全体の計算時間は増える)。一方、 N の値が大きいと、粒度は小さくなってワーカーの計算時間が均等になっていきますが、マスタとワーカーの通信時間が増大するために、全体の計算時間はやはり増えてしまいます。以上のことから、 N には計算時間が最小になる最適な値が存在することになります。

3. 結果

スーパーコンピュータ T2K-Tsukuba を用いて並列計算を行い、 5×5 の魔方陣の全ての解 2 億 7530 万 5224 通りを求めることに成功しました。出力結果は約 25GB になりました。

N の値が 3 から 8 について計算を実行し、 $N=6$ のときに計算時間が最も短くなることがわかりました。 5×5 の魔方陣の全解を求めるのにかった時間は約 2 時間 36 分でした(図 3)。

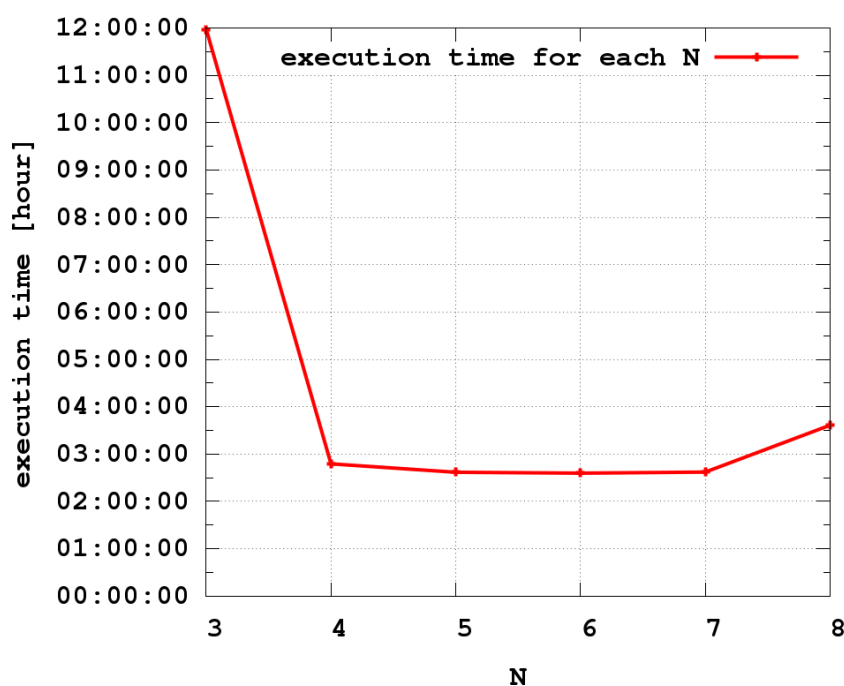


図 3 $N=3 \sim 8$ における実行時間

$N=4 \sim 7$ の実行時間はわずかな差だが、 $N=6$ のときが最も短い。

また、 $N=3, 6, 8$ のときの各ワーカーの主要処理実行時間を調べたところ、 $N=3$ ではバラつきが大きく、 $N=6, 8$ ではバラつきがほとんどないことがわかりました。また、同じく $N=3, 6, 8$ のときの各ワーカーの総通信時間を調べ、 $N=3, 6$ ではほぼ 0 時間、 $N=8$ では 1 時間以上かかったことが判明しました(図 4)。

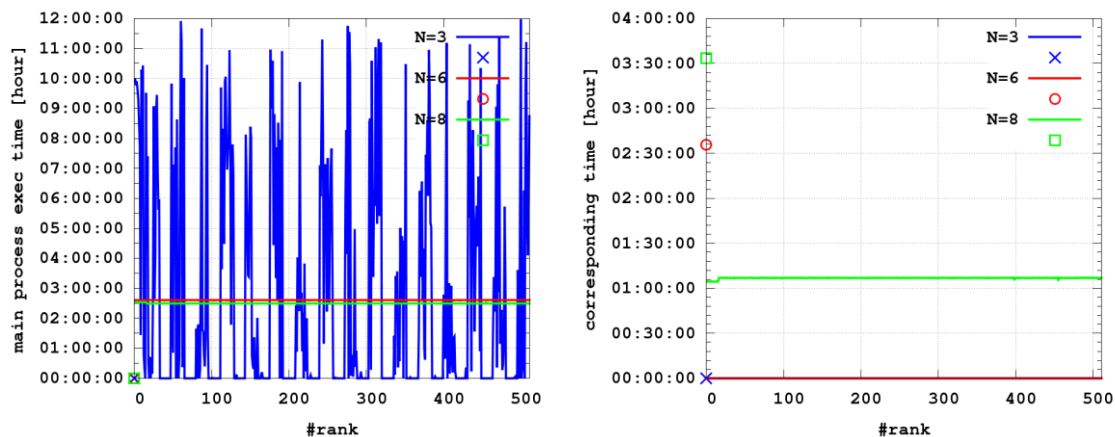


図4 各ワーカーの主要処理実行時間（左）と総通信時間（右）

主要処理実行時間は、N=3 のときおよそ 0 時間から 12 時間とバラつきが大きかった。

4. 今後の展望

筑波大学計算科学研究センターのスーパーコンピュータ「T2K-Tsukuba」は、2014年2月末で運用を終了します。2014年度からは、新たなスーパーコンピュータ「COMA」※3（こま）を導入し、「HA-PACS/TCA」との2台体制で、今後も学際共同利用プログラムを積極的に展開していきます。

杉崎君と朴教授は引き続き、 5×5 魔方陣における並列計算の高速化を進めていきます。COMAの学際共同利用プログラム利用を目指して、アルゴリズムやプログラムの改良を行います。 6×6 魔方陣へのチャレンジは、現時点では不可能と判断しています。総当たり数を36から23まで減らすことができますが、現在のプログラムでは150兆年かかると見積もられています。これはエクサスケールのスパコンでも54万年以上かかる計算で、事実上不可能です。

用語解説

※1 学際共同利用プログラム（平成26年度）

公募について（締切済） <http://www.ccs.tsukuba.ac.jp/kyodoriyou/koubo>

※2 スーパーコンピュータ「T2K-Tsukba」

2008年に稼働開始した648ノード、総演算性能95.4TFLOPS（1秒間に95.4兆回）の並列スーパーコンピュータシステム。筑波大、東大、京大の3機関で共通の仕様を用いているため「T2K」の名がついた。T2K-Tsukbaは2014年2月末に運用を終了する。

※3 スーパーコンピュータ「COMA」

2014年度から導入されるメニーコア・スーパーコンピュータシステム。計算科学研究セン

ターが開発してきた PACS シリーズの 9 代目 (PACS-IX)。377 ノードで総演算性能は 960TFLOPS。そのうち CPU 部分が 151TFLOPS、61 コアのメニーコアプロセッサ部分が 809TFLOPS。

<問い合わせ先>

国立大学法人筑波大学 計算科学研究センター 広報室

TEL : 029-853-6260 FAX : 029-853-6260

E-mail : pr@ccs.tsukuba.ac.jp

※並木中等教育学校への直接の取材依頼はご遠慮ください。筑波大学計算科学研究センター広報室が窓口として対応いたします。